Modulare Funktionen

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 28.03.2011

Jonas Gallenkämper

Dieser Vortrag führt modulare Funktionen sowie Modulformen ein und vermittelt einige Beobachtungen im Zusammenhang mit Gittern über $\mathbb{C}$.

§1 Bekannte Definitionen

Wir werden zunächst bekannte Definitionen wiederholen.

(1.1) Definition
Es bezeichnen

(a) $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die *obere Halbebene*,

(b) $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die *abgeschlossene Ebene*,

(c)

$$SL_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \,\middle|\, ad - bc = 1 \right\}$$

die *spezielle lineare Gruppe*,

(d) $G := SL_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ die *Modulgruppe*, aus der Linearen Algebra als die *projektive spezielle lineare Gruppe* bekannt. $\diamond$

(1.2) Definition (Meromorphe Funktionen)
Eine Funktion f auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$ wird *meromorph* genannt, falls f eine holomorphe Funktion auf $U \setminus P_f$ ist, wobei

(M.1) P_f eine diskrete Teilmenge von U ist und

(M.2) f in den Punkten $z \in P_f$ Pole hat. $\diamond$

(1.3) Definition
Analog zu der aus der Vorlesung Funktionentheorie I bekannten Möbius-Transformation, definieren wir hier eine eingeschränkte Form, indem wir die $SL_2(\mathbb{Z})$ auf $\widehat{\mathbb{C}}$ durch folgende Vorschrift operieren lassen:

$$\begin{aligned} gz &:= \frac{az+b}{cz+d}, z \in \mathbb{C},\ cz+d \neq 0, \\ g(\infty) &:= \begin{cases} \infty, & \text{falls } c = 0, \\ a/c, & \text{falls } c \neq 0, \end{cases} \\ g(-d/c) &:= \infty,\ \text{falls } c \neq 0, \end{aligned}$$

für g= $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ und $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. $\diamond$

§2 Schwach modulare Funktionen

Zunächst wollen wir den Begriff einer schwach modularen Funktion erläutern:

(2.1) Definition (schwach modulare Funktionen)
Sei $k \in \mathbb{Z}$. Man nennt eine Funktion f *schwach modular von Gewicht 2k*[1], falls f meromorph auf $\mathbb{H}$ ist und die folgende Gleichung erfüllt:

$$f(z) = (cz+d)^{-2k} \cdot f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right),\ \text{für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}). \tag{1}$$

Dass es keinen Sinn macht, auch ungerade Gewichte zu zu lassen, zeigt die kurze

(2.2) Bemerkung
Ist f eine schwach modulare Funktion und hat (wider der Definition) ungerades Gewicht, so gilt bereits $f \equiv 0$. $\diamond$

[1]in der Literatur wird auch *von Gewicht k* oder *von Gewicht -2k* gesprochen

Beweis
Sei $m \in \mathbb{Z}$ ungerade und f modular von Gewicht m. Es ist

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Demnach gilt

$$f(z) = (0 \cdot z + (-1))^m \cdot f\left(\frac{(-1) \cdot z + 0}{0 \cdot z - 1}\right) = (-1)^m \cdot f(z) = -f(z).$$

Das ist aber nur für $f \equiv 0$ erfüllt. □

Eine alternative Definition schwach modularer Funktionen gibt die

(2.3) Bemerkung
Anstatt (1) in (2.1) zu erfüllen, kann alternativ auch folgendes gefordert werden:

$$\frac{f(gz)}{f(z)} = \left(\frac{\partial(gz)}{\partial z}\right)^{-k},$$

für alle $g \in SL_2(\mathbb{Z})$. ◇

Beweis
Es gilt

$$\left(\frac{\partial(gz)}{\partial z}\right)^{-k} \overset{\text{QR}}{=} \left(\frac{a \cdot (cz+d) - c \cdot (az+b)}{(cz+d)^2}\right)^{-k} = \left(\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\right)^{-k} \overset{\text{Vor.}}{=} (cz+d)^{2k},$$

$$\text{für } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Es gibt auch eine einfache Möglichkeit, eine auf $\mathbb{H}$ meromorphe Funktion auf schwache Modularität zu überprüfen.

(2.4) Lemma
Sei f eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{H}$. f ist genau dann schwach modular von Gewicht $2k$, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$f(z+1) = f(z) \text{ und} \tag{2}$$
$$f\left(\frac{-1}{z}\right) = z^{2k} \cdot f(z). \tag{3}$$

Beweis

$\underline{\Rightarrow}$: Sei f eine schwach modulare Funktion von Gewicht $2k$. Dann gilt nach Definition für

$$S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

welche die Erzeuger der $SL_2(\mathbb{Z})$ sind:

$$f(z) = z^{-2k} \cdot f\left(\frac{0 \cdot z - 1}{1 \cdot z + 0}\right) = z^{-2k} \cdot f\left(\frac{-1}{z}\right) \text{ und}$$
$$f(z) = 1^{-2k} \cdot f\left(\frac{1 \cdot z + 1}{0 \cdot z + 1}\right) = f(z+1).$$

$\underline{\Leftarrow}$: Für die Rückrichtung führen wir zunächst den *Strichoperator* ein:

$$(f|M)(z) := (cz+d)^{-2k} \cdot f(Mz), \text{ für } M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Damit folgt für beliebige $M := \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), N := \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned}
((f|M)|N)(z) &= (\gamma z + \delta)^{-2k} \cdot (f|M)(Nz) \\
&= (\gamma z + \delta)^{-2k} \cdot \left(c \cdot \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) + d\right)^{-2k} \cdot f(M(Nz)) \\
&= ((c\alpha + d\gamma) \cdot z + (c\beta + d\delta))^{-2k} \cdot f((MN)z) \\
&= (f|(MN))(z),
\end{aligned}$$

denn $MN = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$.

Seien nun für f (2) und (3) erfüllt. Um zu zeigen, dass die Relation (1) für alle $g \in SL_2(\mathbb{Z})$ erfüllt ist, muss man dies also nur für die Erzeuger der $SL_2(\mathbb{Z})$ nachweisen. Diese sind aber gerade S und T und für diese gilt (1) nach Voraussetzung. $\square$

Wir wollen uns nun mit der Reihendarstellung einer schwach modularen Funktion beschäftigen.

(2.5) Proposition
Sei f meromorph auf $\mathbb{H}$ und habe für ein $c \geq 0$ keine Pole $z \in P_f$ mit $\mathrm{Im}(z) > c$ und f erfülle (2) aus (2.4). Dann kann man f als Funktion in Abhängigkeit von $q = e^{2\pi iz}$ schreiben, welche wir mit $\widetilde{f}$ bezeichnen wollen, also:

$$\widetilde{f}(q) = f\left(\frac{1}{2\pi i} \cdot \mathrm{Log}(q)\right) = f(z).$$

$\widetilde{f}$ ist dabei holomorph auf $\dot{K}_{e^{-2\pi c}} := K_{e^{-2\pi c}} \setminus \{0\} = \left\{e^{2\pi iz} \mid z \in S_{c,\infty}\right\}$, wobei $S_{c,\infty} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > c\}$.
Können wir $\widetilde{f}$ im Ursprung meromorph (bzw. holomorph) fortsetzen, dann lässt sich $\widetilde{f}$ als Reihe darstellen:

$$\widetilde{f}(q) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n q^n,$$

wobei $m \in \mathbb{Z}$ (bzw. $m \in \mathbb{N}_0$) gilt. $\diamond$

Beweis
Wegen (2) ist f eine Funktion mit Periode 1 und da in $S_{c,\infty}$ keine Pole liegen, ist f dort holomorph. Damit sind die Voraussetzungen von dem aus der Vorlesung Funktionentheorie I bekannten Satz von der Fourier-Entwicklung erfüllt. Es gilt demnach:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi inz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n.$$

Nimmt man nun noch an, dass $\widetilde{f}$ sich im Ursprung fortsetzen lässt, so erhält man

$$\widetilde{f}(q) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n q^n,$$

als Laurententwicklung mit entsprechendem $m \in \mathbb{Z}$ (bzw. $m \in \mathbb{N}_0$). $\square$

Das führt uns zu der

(2.6) Definition (modulare Funktion)
Eine schwach modulare Funktion f, die für ein $c \geq 0$ keine Pole in $\{z \in \mathbb{C} | Im(z) > c\}$ hat, wird *modular* genannt, falls f meromorph in unendlich ist, das heißt, wenn $\widetilde{f}$ sich im Ursprung meromorph fortsetzen lässt. Ist dies der Fall, dann setzen wir $f(\infty) := \widetilde{f}(0)$. $\diamond$

§3 Modulformen

— Definition —

In diesen Abschnitt starten wir mit der

(3.1) Definition (Modulform)
Eine modulare Funktion f, die auf ganz $\mathbb{H}$ (inklusive ∞) holomorph ist, wird *Modulform* genannt. Gilt zudem $f(\infty) = 0$, so ist diese eine *Spitzenform*. $\diamond$

Eine Modulform von Gewicht $2k$ lässt also sich als folgende Reihe darstellen (vergleiche (2.5)):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z},$$

welche für $|q| < 1$ (beziehungsweise für $\mathrm{Im}(z) > 0$)[2] konvergiert.

(3.2) Beispiel
Seien f und g Modulformen von Gewichten $2k$ und $2l$, dann ist das Produkt $f \cdot g$ eine Modulform von Gewicht $2k + 2l$, denn es gilt:

$$(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z) = (cz+d)^{-2k} \cdot f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \cdot (cz+d)^{-2l} \cdot g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$
$$= (cz+d)^{-(2k+2l)} \cdot (f \cdot g)\left(\frac{az+b}{cz+d}\right), \text{ für } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$\diamond$

— Gitterfunktionen und Modulformen —

Zunächst vermerken wir die

(3.3) Definition (Gitter)
Sei V ein n-dimensionaler, reeller Vektorraum. Wenn Γ eine Untergruppe von V ist und es eine $\mathbb{R}$-Basis $(e_1, ..., e_n)$ von V gibt, welche eine $\mathbb{Z}$-Basis von Γ ist (das heißt $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 \oplus ... \oplus \mathbb{Z}e_n$), so ist Γ ein *Gitter* in V. $\diamond$

[2] $|q| = e^{\mathrm{Re}(2\pi i z)} \overset{z=x+iy}{=} e^{\mathrm{Re}(2\pi i x - 2\pi y)} = e^{-2\pi y}$, also gilt $|q| < 1$ genau dann, wenn $\mathrm{Im}(z) = y > 0$.

(3.4) Bemerkung
Statt der $\mathbb{R}$-Basis in (3.3) kann man auch äquivalent eine der folgenden Bedingungen fordern:

(a) Γ ist diskret und V/Γ ist kompakt,

(b) Γ ist diskret und erzeugt den $\mathbb{R}$-Vektorraum V

(ohne Beweis). ◇

Die Menge aller Gitter werden in der folgenden Definition zusammengefasst.

(3.5) Definition
Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Gitter in $\mathbb{C}$ als 2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst. Sei $\mathcal{M} := \{(w_1, w_2) \in (\mathbb{C}^*)^2 \mid \operatorname{Im}(w_1/w_2) > 0\}$. Zu einem solchen Paar $(w_1, w_2) \in \mathcal{M}$ ist $\Gamma(w_1, w_2) = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2$ das *zu* (w_1, w_2) *assoziierte Gitter*. ◇

Einen ersten Zusammenhang zwischen den Elementen in $\mathcal{M}$ gibt der

(3.6) Satz
Zwei Elemente $(w_1, w_2), (v_1, v_2) \in \mathcal{M}$ definieren genau dann das gleiche Gitter, wenn sie bezüglich der $SL_2(\mathbb{Z})$ äquivalent sind, das heißt, es existiert eine Matrix

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}),$$

sodass $g(w_1, w_2) := (aw_1 + bw_2, cw_1 + dw_2) = (v_1, v_2)$ gilt. ◇

Beweis
$\underline{\Rightarrow:}$ Seien $(w_1, w_2), (v_1, v_2) \in \mathcal{M}$, mit $\Gamma(w_1, w_2) = \Gamma(v_1, v_2)$. Dann existieren $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, mit

$$\begin{aligned} v_1 &= aw_1 + bw_2 \quad &&\text{und} \quad && v_2 = cw_1 + dw_2, \quad &&\text{aber ebenso auch} \\ w_1 &= \alpha v_1 + \beta v_2 \quad &&\text{und} \quad && w_2 = \gamma v_1 + \delta v_2, \end{aligned}$$

für entsprechende $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt:

$$w_1 = \alpha \cdot (aw_1 + bw_2) + \beta \cdot (cw_1 + dw_2) \text{ und}$$
$$w_2 = \gamma \cdot (aw_1 + bw_2) + \delta \cdot (cw_1 + dw_2),$$

weshalb

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta c &= 1, \qquad & \gamma a + \delta c &= 0, \\ \alpha b + \beta d &= 0, \qquad & \gamma b + \delta d &= 1 \end{aligned}$$

gelten muss, da w_1 und w_2 linear unabhängig sind. Damit ergibt sich

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also gilt:

$$g := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$$

und somit $\det(g) = \pm 1$.

Wäre nun die Determinante $\det(g) = -1$, so würde gelten:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{v_1}{v_2}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{aw_1 + bw_2}{cw_1 + dw_2}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{a \cdot \left(\frac{w_1}{w_2}\right) + b}{c \cdot \left(\frac{w_1}{w_2}\right) + d}\right) \overset{\text{Möbiustransf.}}{=} \operatorname{Im}\left(\varphi_g\left(\frac{w_1}{w_2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \left(\varphi_g\left(\frac{w_1}{w_2}\right) - \overline{\varphi_g\left(\frac{w_1}{w_2}\right)}\right) \overset{\text{Funkt.th.}}{=} \frac{1}{2i} \cdot \left(\varphi_g\left(\frac{w_1}{w_2}\right) - \varphi_g\left(\overline{\left(\frac{w_1}{w_2}\right)}\right)\right)$$

$$\overset{\text{Funkt.th.}}{=} \frac{1}{2i} \cdot \left(\frac{\det(g) \cdot \left(\left(\frac{w_1}{w_2}\right) - \overline{\left(\frac{w_1}{w_2}\right)}\right)}{\left(c \cdot \left(\frac{w_1}{w_2}\right) + d\right)\left(c \cdot \left(\overline{\left(\frac{w_1}{w_2}\right)} + d\right)\right)}\right) \overset{\text{Vor.}}{=} (-1) \cdot \operatorname{Im}\left(\frac{w_1}{w_2}\right) \cdot \frac{1}{|c \cdot \left(\frac{w_1}{w_2}\right) + d|^2}.$$

Also gilt $\operatorname{sgn}\left(\operatorname{Im}\left(\frac{w_1}{w_2}\right)\right) = -\operatorname{sgn}\left(\operatorname{Im}\left(\frac{v_1}{v_2}\right)\right)$, das ist aber ein Widerspruch dazu, dass (w_1, w_2) und (v_1, v_2) in $\mathcal{M}$ lagen.

$\underline{\Leftarrow}$: Seien $(w_1, w_2), (v_1, v_2) \in \mathcal{M}$ äquivalent modulo der $SL_2(\mathbb{Z})$, das heißt,

$$v_1 = aw_1 + bw_2 \text{ und } v_2 = cw_1 + dw_2 \text{ für ein } g = \begin{pmatrix} a\, b \\ c\, d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Dann ist $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von $\Gamma(w_1, w_2)$, denn mit

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gilt $g^{-1}(v_1, v_2) = (w_1, w_2)$. Also gilt $\Gamma(w_1, w_2) = \Gamma(v_1, v_2)$. □

Damit wollen wir im Folgenden nun Gitter in $\mathbb{C}$ mit den Quotienten der Elemente

aus $\mathcal{M}$ unter der Operation der $SL_2(\mathbb{Z})$ identifizieren.
Wir lassen nun $\mathbb{C}^*$ auf $\mathcal{R}$ operieren und zwar durch:

$$\Gamma \to \lambda\Gamma \text{ (bzw. } (w_1, w_2) \mapsto (\lambda w_1, \lambda w_2)), \lambda \in \mathbb{C}^*$$

Wir können $\mathcal{M}/\mathbb{C}^*$ durch eine Abbildung f mit $\mathbb{H}$ identifizieren, indem wir ein Element aus $\mathcal{M}$ wie folgt abbilden:

$$(w_1, w_2) \mapsto z = w_1/w_2.$$

f ist wohldefiniert, da die Bedingung von $\mathcal{M}$ vorschreibt, dass $\operatorname{Im}(w_1/w_2) > 0$ gelten muss, und f ist surjektiv, da wir zu gegebenen $z \in \mathbb{H}$ stets $w_1 = z$ und $w_2 = 1$ wählen können, also keine Faser von f leer ist. f wandelt auch die Operation der $SL_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathcal{M}$ in die von G auf $\mathbb{H}$ um, denn für

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$$

gilt:

$$f(g(w_1, w_2)) = f(aw_1 + bw_2, cw_1 + dw_2) = \frac{aw_1 + bw_2}{cw_1 + dw_2} = \frac{a \cdot \left(\frac{w_1}{w_2}\right) + b}{c \cdot \left(\frac{w_1}{w_2}\right) + d}$$

$$= g(w_1/w_2) = gf(w_1, w_2).$$

Dabei wissen wir aus dem Vortrag »Die Modulgruppe«, dass die $SL_2(\mathbb{Z})$ auf $\mathbb{H}$ wie G operiert.

Das führt uns zu der

(3.7) Proposition
Die Funktion f induziert eine Bijektion von $\mathcal{R}/\mathbb{C}^*$ nach $\mathbb{H}/G$, das bedeutet, dass die Elemente aus $\mathbb{H}/G$ jeweils eindeutig bis auf Drehung und Streckung mit einem Gitter in $\mathbb{C}$ identifiziert werden können. $\diamond$

Beweis
Injektivität:
Seien (w_1, w_2), $(v_1, v_2) \in \mathcal{M}$, sodass $\Gamma(w_1, w_2)$ und $\Gamma(v_1, v_2)$ Vertreter von $\mathcal{R}/\mathbb{C}^*$

sind und es gelte:

$$f(w_1, w_2) \equiv f(v_1, v_2) \ (mod\ G)$$
$$\Rightarrow \exists\, g \in G : g(w_1/w_2) = (v_1/v_2)$$
$$\Rightarrow \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G : \frac{a\cdot\left(\frac{w_1}{w_2}\right)+b}{c\cdot\left(\frac{w_1}{w_2}\right)+d} = \frac{v_1}{v_2}$$
$$\Rightarrow \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G : \frac{aw_1+bw_2}{cw_1+dw_2} = \frac{v_1}{v_2}$$
$$\Rightarrow \exists \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G : aw_1 + bw_2 = \lambda v_1, \text{ sowie } cw_1 + dw_2 = \lambda w_2, \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{C}^*$$
$$\overset{\text{Satz}(3.6)}{\Rightarrow} \Gamma(w_1, w_2) = \lambda\Gamma(v_1, v_2),$$

also waren $\Gamma(w_1, w_2)$ und $\Gamma(v_1, v_2)$ bereits in der selben Äquivalenzklasse.

Surjektivität:
Sei z ein Vertreter einer Äquivalenzklasse in $\mathbb{H}/G$, zeige $f^{-1}(\{z\}) \neq \emptyset$:
$f^{-1}(\{z\}) = \{(w_1, w_2) \in \mathcal{M} \mid f(w_1, w_2) = z\} = \{(w_1, w_2) \in \mathcal{M} \mid w_1/w_2 = z\}$. Wähle nun $w_2 = 1, w_1 = z$, dann liegt $\Gamma(w_1, w_2)$ in $\mathcal{R}$, da $\mathrm{Im}(w_1) \neq 0$ und somit w_1 und w_2 in $\mathbb{R}^2$ linear unabhängig sind, also $\mathbb{R}^2$ erzeugen und damit nach der Definition ein Gitter erzeugen. □

Zum Schluss wollen wir uns noch kurz mit Funktionen auf $\mathcal{R}$ mit Werten in $\widehat{\mathbb{C}}$ beschäftigen. Sei dazu F eine solche Funktion und $k \in \mathbb{Z}$.

(3.8) Definition
Wir sagen auch hier wieder, dass F eine *Gitterfunktion von Gewicht 2k* ist, falls

$$F(\lambda\Gamma) = \lambda^{-2k} \cdot F(\Gamma)$$

für alle Gitter Γ und alle $\lambda \in \mathbb{C}^*$ gilt.
Wenn $(w_1, w_2) \in \mathcal{M}$ gilt, so ist $F(w_1, w_2) := F(\Gamma(w_1, w_2))$, was uns zu

$$F(\lambda w_1, \lambda w_2) = \lambda^{-2k} \cdot F(w_1, w_2) \tag{4}$$

führt. ◇

(3.9) Bemerkung
$F(w_1, w_2)$ aus (3.8) ist invariant unter der Operation der $SL_2(\mathbb{Z})$. ◇

Beweis
Dieser folgt direkt aus Satz (3.6):
Sei $(w_1, w_2) \in \mathcal{M}$ und $g \in SL_2(\mathbb{Z})$, dann gilt für $(v_1, v_2) = g(w_1, w_2)$:

$$F(w_1, w_2) = F(\Gamma) = F(v_1, v_2), \text{ wobei } \Gamma = \Gamma(w_1, w_2) = \Gamma(v_1, v_2) \text{ gilt.}$$ $\square$

Die letzte Beobachtung des Vortrags notieren wir als

(3.10) Bemerkung
Zu jedem F aus (3.8) mit Bedingung (4) existiert eine Funktion f auf $\mathbb{H}$, sodass gilt:

$$F(w_1, w_2) = w_2^{-2k} \cdot f(w_1/w_2). \tag{5}$$

Beweis
Wie man in (4) sieht, ist das Produkt

$$w_2^{2k} \cdot F(w_1, w_2) = F\left(\frac{w_1}{w_2}, 1\right) =: f\left(w_1/w_2\right)$$

ausschließlich von $z = w_1/w_2$ abhängig, das heißt, wir können f auf $\mathbb{H}$ konstruieren, sodass (5) gilt, denn es gilt stets $\mathrm{Im}(z) > 0$, da $(w_1, w_2) \in \mathcal{M}$. $\square$

Mit dem Wissen, dass F invariant unter der Operation der $SL_2(\mathbb{Z})$ ist, gilt für f folglich (1) aus (2.1):

$$f(z) = F(z, 1) = F(az + b, cz + d) = (cz + d)^{-2k} \cdot f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right),$$

für alle

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Also gibt uns (5) aus (3.10) für ein f, das (1) aus (2.1) erfüllt, eine assoziierte Gitterfunktion F auf $\mathcal{R}$. Somit können wir modulare Funktionen von Gewicht $2k$ mit gewissen Gitterfunktionen von Gewicht $2k$ identifizieren.

§4 Literatur

Der Vortrag beruht hauptsächlich auf:

Jean-Pierre Serre, A Course In Arithmetic, Kapitel VII, §2 Modular functions, 2. Auflage, Springer Berlin, 1996.

Zudem wurden die folgenden Werke für Beweisverfahren zu Rate gezogen:

Aloys Krieg, Skript zur Vorlesung Funktionentheorie I, Aachen, 2010;

Max Koecher, Aloys Krieg, Elliptische Funktionen und Modulformen, 2. Auflage, Springer Berlin, 2007;

Eberhard Freitag und Rolf Busam, Funktionentheorie, 2. Auflage, Springer Berlin, 1995.